بنام خدا

جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

ماخ

دفترچه سوالات به همراه پاسخنامه تشریحی
مرحله دوم
بیست و ششمین دوره‌ی المپیاد ریاضی سال ۱۳۸۷

چند گزینه‌ای	مساله‌های کوتاه	مدت آزمون (دقیقه)
تعداد سوالات		
–	۶	–

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است.

۱. کد برگه سوالات شما **۱** است. این کد را در محل مربوط روی پاسخ نامه بزنید، **در غیر این صورت پاسخ نامه‌ی شما تصحیح نخواهد شد**. توجه داشته باشید کد برگه‌ی سولات شما در بالای هر یک از صفحه‌های این دفترچه نوشته شده است. با کد اصلی که در همین صفحه است یکی باشد.

۲. بلافاصله پس از آغاز آزمون تعداد سوالات داخل دفترچه و وجود همه‌ی برگه‌های دفترچه‌ی سولات را بررسی نمایید. در صورت وجود هر گونه نقصی در دفترچه، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.

۳. یک برگ پاسخ‌نامه در اختیار شما قرار گرفته که مشخصات شما بر روی آن نوشته شده است در صورت نادرست بودن آن، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.

۴. برگه‌ی پاسخ‌نامه را دستگاه تصحیح می‌کند، پس آن را تا نکنید و تمیز نگه دارید و به علاوه، پاسخ هر پرسش را با **مداد مشکی نرم** در محل مربوط علامت بزنید. لطفا خانه‌ی مورد نظر را کاملاً سیاه کنید.

۵. در سوال‌های **چهار گزینه‌ای** به هر پاسخ درست ۳ نمره‌ی مثبت و به هر پاسخ نادرست یک نمره‌ی منفی تعلق می‌گیرد. در **مساله‌های کوتاه** به هر پاسخ درست ۸ نمره مثبت تعلق می‌گیرد و پاسخ نادرست نمره‌ی منفی ندارد.

۶. همراه داشتن هر گونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه و لپ‌تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.

۷. آزمون مرحله‌ی دوم برای دانش‌آموزان سال اول و دوم دبیرستان **صرفاً جنبه‌ی آزمایشی و آمادگی** دارد و شرکت‌کنندگان در دوره‌ی تابستانی از بین دانش‌آموزان سال سوم دبیرستان انتخاب می‌شود.

۸. داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سوالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته‌اند، **در غیر این صورت دفترچه باید همراه پاسخ‌نامه تحویل داده شود.**

۱- به چند طریق می‌توان $n-3$ قطر یک n ضلعی منتظم را طوری رسم کرد که اولاً هم‌دیگر را داخل n ضلعی قطع نکنند، ثانیاً هر کدام از مثلث‌های به وجود آمده دست‌کم یک ضلع مشترک با n ضلعی داشته باشد؟

۲- فرض کنید I_a مرکز دایره‌ی محاطی خارجی مثلث ABC، متناظر با رأس A باشد و این دایره، به ترتیب، در نقاط B' و C' به امتداد AB و AC مماس باشد. I_aB و I_aC، به ترتیب $B'C'$ را در P و Q قطع می‌کنند و M نقطه‌ی برخورد CP و BQ است. ثابت کنید طول عمود وارد از M بر ضلع BC برابر اندازه‌ی شعاع دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ABC است.

۳- a, b, c و d اعدادی حقیقی هستند و دست‌کم یکی از c و d صفر نیست. تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ را در نظر بگیرید. فرض کنید برای هر x، $f(x)\neq x$. نشان دهید اگر به ازای یک a، $f^{1387}(a)=a$، آنگاه برای هر x در دامنه $f^{1387}(x)=x$. (f^{1387}، f^n یعنی n بار ترکیب تابع f.)

راهنمایی: نشان دهید برای هر تابع به شکل $g(x)=\dfrac{sx+t}{ux+v}$، اگر معادله $g(x)=x$ بیش از دو جواب داشته باشد آنگاه برای هر x، $g(x)=x$.

۴- نشان دهید تنها عدد طبیعی a، که برای هر n طبیعی $4(a^n+1)$ مکعب کامل باشد، یک است.

۵- می‌خواهیم برای تلفن‌های یک شهر شماره‌ی انتخاب کنیم. شماره‌ها ده رقمی‌اند و از رقم صفر نباید در آن‌ها استفاده شود. هدف این است که از برخی از شماره‌ها استفاده نکنیم تا هر دو شماره‌ی موجود یا در بیش از یک رقم اختلاف داشته باشند و یا در یک رقم بیش از یک واحد اختلاف داشته باشند. بیشترین تعداد شماره‌ی که می‌تواند استفاده شود چند تاست؟ انتخاب این بیش‌ترین تعداد شماره، به چند شکل ممکن است؟

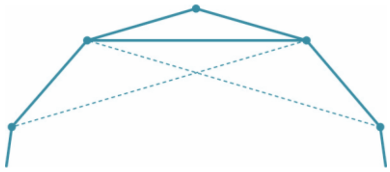
۶- فرض کنید در مثلث ABC، H پای ارتفاع وارد بر BC باشد. از H بر AB و AC عمود می‌کنیم تا، به ترتیب، نقاط T و T' به دست آیند. نشان دهید اگر O مرکز دایره‌ی محیطی ABC باشد و $AC=2OT$، آنگاه $AB=2OT'$.

راه‌حل سؤالات مرحله دوم بیست‌ودومین المپیاد ریاضی کشور، سال ۱۳۸۷

۱- به کمک استقرا می‌توان به سادگی نشان داد که هرگاه $n-۳$ قطر نامتقاطع از یک n ضلعی محدب رسم شود، آن را به $n-۲$ مثلث تقسیم می‌کند. به این صورت که یکی از قطرهای رسم شده را در نظر بگیرید و n ضلعی را از روی آن قطر به دو چندضلعی با تعداد ضلع‌های کم‌تر تقسیم کنید و به کمک استقرا حکم موردنظر را نتیجه بگیرید. تنها حالت پایه‌ی $n=۳$ باقی می‌ماند که ازآنجاکه هیچ قطری رسم نشده است، چندضلعی به یک مثلث تقسیم می‌شود.

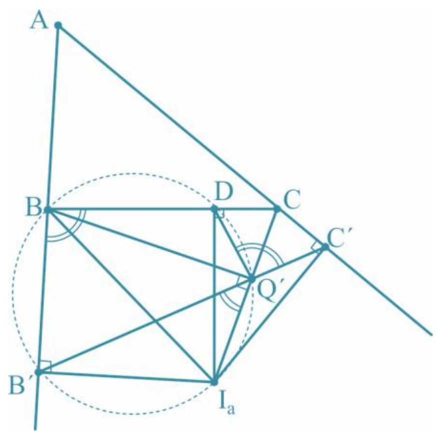
حال در مسئله‌ی اصلی هنگامی‌که $n>۳$ است هیچ‌کدام از مثلث‌ها نمی‌توانند با n ضلعی سه ضلع مشترک داشته باشند و ضمناً هر مثلث حداقل یک و حداکثر دو ضلع مشترک با n ضلعی دارد. با توجه به این‌که $n-۲$ مثلث و n ضلع‌داریم، دقیقاً دو تا از مثلث‌ها دو ضلع مشترک با n ضلعی دارند و بقیه تنها یک ضلع مشترک دارا هستند.

یکی از این دو مثلث را در نظر می‌گیریم. این مثلث می‌تواند یکی از n مثلثی باشد که دو ضلع مجاور از n ضلعی را شامل هستند. حال سومین ضلع از این مثلث را در نظر بگیرید که حتماً یک قطر از چندضلعی است. مثلث دیگری که این قطر یکی از ضلع‌های آن است، می‌تواند یکی از دو مثلثی باشد که این قطر و یکی از دو ضلع n ضلعی که مجاور ضلع‌های مثلث قبلی هستند را شامل است. (به شکل زیر دقت کنید.)



حال به همین ترتیب قطری که مثلث جدید شامل است را در نظر بگیرید. برای مثلث سوم هم با همین استدلال دو حالت داریم. با ادامه‌ی همین فرآیند برای هر مثلث جدید (به‌جز اولین و آخرین مثلث که به ترتیب n حالت و ۱ حالت داشتند) دو حالت محتمل است. اما دقت کنید که هر آرایش از مثلث‌ها دو بار شمرده شده است، چرا که در هر آرایش دو مثلث وجود دارد که با چندضلعی دارای دو ضلع مشترک است و شروع از هرکدام می‌تواند به همین آرایش منجر شود. پس تعداد کل حالت‌ها برابر است با $\frac{n\times ۲^{n-۴}}{۲}=n۲^{n-۵}$.

۲- D را نقطه‌ی تماس دایره‌ی محاطی خارجی نظیر رأس A با ضلع BC از مثلث بگیرید. در این صورت $CD=CC'$ چراکه دو مثلث $I_aC'C$ و I_aDC به دلیل داشتن یک زاویه‌ی ۹۰ درجه‌ی و دو ضلع برابر هم‌نهشت هستند. Q' را پای عمود وارد از B بر I_aC بگیرید. در این صورت مثلث‌های DCQ' و $C'CQ'$ هم‌نهشت هستند، زیرا $Q'C=Q'C, \angle Q'CD=\angle Q'CC'$ و $CD=CC'$. درنتیجه $\angle C'Q'C=\angle DQ'C$. ازآنجاکه زاویه‌های $\angle BQ'I_a$ و $\angle BDI_a$ قائمه هستند، چهارضلعی $BDQ'I_a$ محاطی است. درنتیجه $\angle DQ'C=\angle DBI_a$ ضمناً دقت کنید که BI_a نیمساز زاویه‌ی $\angle DBB'$ است و لذا $\angle DBI_a=\angle B'BI_a$. قائمه بودن زاویه‌های $\angle BB'I_a$ نتیجه می‌دهد که نقطه‌ی B' هم روی دایره محیطی چهارضلعی $BDQ'I_a$ قرار دارد، پس نتیجه می‌گیریم که $\angle B'BI_a=\angle B'Q'I_a$. با جمع‌بندی این رابطه‌ها می‌فهمیم که $\angle B'Q'I_a=\angle CQ'C'$. پس نقطه‌های Q',B' و C' روی یک خط قرار دارند. در نتیجه نقطه‌ی Q' که محل تقاطع I_aC و $B'C'$ است همان نقطه‌ی Q است. پس در کل نشان دادیم که $BQ\perp I_aC$. مشابه همین استدلال نشان می‌دهد که $CP\perp I_aB$.



حال دقت کنید که CI نیم‌ساز داخلی زاویه‌ی C است و در نتیجه بر CI_a که نیمساز خارجی این زاویه‌ی است عمود می‌باشد. این نکته با توجه به این‌که $BQ \parallel I_aC$ نشان می‌دهد که $BQ \perp IC$ و مشابه همین نتیجه می‌شود که $CP \parallel BI$. پس چهارضلعی $BMCI$ یک متوازی‌الاضلاع است و درنتیجه‌ی فاصله‌ی دو رأس M و I تا قطر BC مساوی است. اما فاصله I از BC برابر طول شعاع دایره محاطی داخلی مثلث است و بنابراین اثبات حکم به پایان می‌رسد.

۳- اگر $f^{۱۳۸۷}(a) = a$، آنگاه با اثر دادن تابع f روی دو طرف این تساوی می‌توان دید که

$$f^{۱۳۸۷}(f(a)) = f^{۱۳۸۸}(a) = f(f^{۱۳۸۷}(a)) = f(a)$$

و دقت کنید که $f(a) \neq a$، پس $f(a)$ جوابی متمایز از a برای معادله‌ی $f^{۱۳۸۷}(x) = x$ است. با اعمال دوباره‌ی تابع f بر دو طرف عبارت بالا می‌توان دید که

$$f^{۱۳۸۷}(f(a)) = f^{۱۳۸۸}(a) = f(f^{۱۳۸۷}(a)) = f\ \ f(a)$$

پس $f(f(a))$ هم جواب دیگری برای این معادله است. اما دقت کنید که $f(f(a)) \neq f(a)$. حال ادعا می‌کنیم که $f(f(a))$ و a هم متمایز هستند. در غیر این صورت اگر $f^{۲}(a) = a$ باشد، داریم:

$$f^{۱۳۸۸}(a) = f^{۱۳۸۶}(f^{۲}(a)) = f^{۱۳۸۶}(a) = f^{۱۳۸۴}f^{۲}(a)) = f^{۱۳۸۴}(a) = \ldots = f^{۴}(a) = f^{۲}(f^{۲}(a)) = f^{۲}(a)$$

اما $f(f^{۱۳۸۸}(a) = f(f^{۱۳۸۸}(a)) = f(a)$، پس باید $f^{۲}(a) = f(a)$ باشد که امکان ندارد. در نتیجه در کل سه جواب حقیقی متمایز برای معادله‌ی $f^{۱۳۸۷}(x) = x$ یافته‌ایم.

می‌توان به‌سادگی چک کرد که ترکیب دو تابع به فرم $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ هم به همین فرم است (البته با a، b، c و d متفاوت). این نتیجه می‌دهد که تابع $f^{۱۳۸۷}(x)$ تابعی به فرم $\dfrac{mx+n}{px+q}$ است که معادله $\dfrac{mx+n}{px+q} = x$ سه جواب حقیقی متمایز دارد. جواب‌های این معادله به‌وضوح جواب‌های معادله‌ی $px^{۲} + (q-m)x - n = ۰$ هم هستند که یک چندجمله‌ای از درجه‌ی حداکثر دو است. ازآنجاکه یک چندجمله‌ای نا صفر از درجه‌ی حداکثر دو، حداکثر دو جواب حقیقی دارد؛ این چندجمله‌ای باید متحد با صفر باشد که این نتیجه می‌دهد که $p = ۰$ ، $q = m$ و $n = ۰$. پس داریم $f^{۱۳۸۷}(x) = \dfrac{mx+n}{px+q} = \dfrac{mx}{m} = x$، و این یعنی برای هر عدد حقیقی x، $f^{۱۳۸۷}(x) = x$.

۴- راه‌حل اول. $۴(a^{۳}+۱)$ و $۴(a^{۹}+۱)$ هر دو مکعب کامل هستند، پس تقسیم آن‌ها یعنی $\dfrac{۴(a^{۹}+۱)}{۴(a^{۳}+۱)} = a^{۶} - a^{۳} + ۱$ هم مکعب کامل است. اگر $a > ۱$ باشد، $a^{۶} - a^{۳} + ۱ < a^{۶} = (a^{۲})^{۳}$ و از طرف دیگر $a^{۶} - a^{۳} + ۱ > a^{۶} - ۳a^{۲} - ۱ = (a^{۲}-۱)^{۳}$، زیرا:

$$۳a^{۴} \ldots a^{۳} - ۳a^{۲} + ۲$$
$$= (a^{۴} - a^{۳}) + (۲a^{۳} - ۳a^{۲}) + ۲$$
$$= a^{۳}(a-۱) + a^{۲}(۲a-۳) + ۲ > ۰$$

اما $(a^{۲}-۱)^{۳}$ و $(a^{۲})^{۳}$ دو مکعب کامل متوالی هستند و عددی که بین آن‌ها قرار دارد نمی‌تواند مکعب کامل باشد. پس a مجبور است برابر یک باشد که در این صورت هم همه‌ی جمله‌ها برابر ۸ و در نتیجه مکعب کامل هستند.

راه‌حل دوم. اگر $a > ۲$ باشد، $۴(a^{n}+۱)$ تابعی اکیداً صعودی برحسب n است. حال دقت کنید که $۴(a^{n+۳}+۱)$ و همین‌طور $a^{۳} \times ۴(a^{n}+۱) = ۴(a^{n+۳}+a^{۳})$ مکعب کامل هستند. اما تفاضل این دو مقدار برابر $۴a^{۳} - ۴$ است که مستقل از n است. این یعنی تفاضل دو مکعب کامل که هر دو با افزایش n زیاد می‌شوند مقداری ثابت است که امکان ندارد. این تناقض نشان می‌دهد که a باید برابر یک باشد.

راه‌حل سوم. از لم زیر که حالت خاصی از گزاره‌ای است که به لم دو خط معروف است استفاده می‌کنیم:

لم. فرض کنید x عددی طبیعی و p عددی اول و فرد باشد که $p|x+۱$ اگر n عددی طبیعی و فرد باشد، تعداد عوامل P در $x^n+۱|$ برابر تعداد عوامل P در $x+۱$ به‌اضافه تعداد عوامل P در n است.

اثبات. تعداد عوامل P در عدد طبیعی m را با $\| m \|_p$ نمایش می‌دهیم و حکم را به استقرا روی $\| n \|_p$ ثابت می‌کنیم.

اگر n بر p بخش‌پذیر نباشد، با توجه به این‌که $(x^n+۱)=(x+۱)(x^{n-۱}-x^{n-۲}+\ldots-x+۱)$ باید نشان دهیم که $p \times x^{n-۱}-x^{n-۲}+\ldots-x+۱$ برای این منظور دقت کنید که:

$$x^{n-۱}-x^{n-۲}+\ldots-x+۱\equiv(-۱)^{n-۱}-(-۱)^{n-۲}+\ldots-(-۱)+۱\not\equiv ۰ \pmod p)$$

اگر n تنها یک عامل P داشته باشد، باید نشان دهیم که تعداد عوامل P در $x^{n+۱}$ یکی بیش‌تر از عوامل P در $x+۱$ است. در این حالت می‌توان نوشت $n=pm$ که m بر P بخش‌پذیر نیست. حال طبق استدلال قسمت قبل

$$\| x^{mp}+۱ \|_p=\| (x^p)^m+۱ \|_p=\| x^p+۱ \| p$$

پس کافی است حکم این قسمت را برای حالت $n=p$ ثابت کنیم. ازآنجاکه $x+۱$ بر p بخش‌پذیر است می‌توان عدد صحیح t یافت که $x=tp-۱$.

$$x^p+۱=(tp-۱)^p+۱=\sum_{i=۱}^{p}\binom{p}{i}(tp)^i(-۱)^{p-i}=(\sum_{i=۲}^{p}\binom{p}{i}(tp)^{i-۱}(-۱)^{p-i}+p)=(x+۱)(\cdots)$$

ازآنجاکه تمام $\binom{p}{i}$ها بر p بخش‌پذیر هستند، عبارت داخل پرانتز تنها یک عامل p دارد. این نشان می‌دهد که تعداد عوامل p در $x^p+۱$ یکی بیشتر از عوامل p در $x+۱$است. حال فرض کنید که حکم برای اعدادی که k عامل p دارند ثابت‌شده باشد و n، $k+۱$عامل p داشته باشد، در این صورت عدد طبیعی فرد m وجود دارد که n=mp و m، k عامل p دارد. حال با توجه به فرض استقرا داریم:

$$\| x^{mp}+۱ \|_p=\| (x^p)^m+۱ \|_p=\| x^p+۱ \| +\| m \|_p=\| x+۱ \|_p+\| p \|_p+\| m \|_p=\| x+۱ \|_p+\| mp \|_p$$

پس حکم برای هر عدد طبیعی برقرار است.

حال دقت کنید که $۴(a^۳+۱)۴(a+۱)(a^۲+۱)(a^۲-a+۱)$. اگر $a>۱$ باشد، $a^۲-a+۱$ عدد فردی بزرگ‌تر از یک است، پس عامل اول فردی مثل p دارد. با استفاده از لم بالا داریم:

$$\| ۴(a^{۳p}+۱ \|_p=(a^{۳p}+۱ \|_p=(a^۳+۱ \|_p+(p \|_p=۴(a^۳+۱)_p+۱$$

اما $۴(a^۳+۱)$ و $۴(a^{۳p}+۱)$ هر دو مکعب کامل هستند، پس تعداد عوامل p در آن‌ها باید مضرب ۳ باشد که چون اختلاف این تعداد برابر یک است امکان ندارد. درنتیجه a نمی‌تواند بیشتر از ۱ باشد و درنتیجه تنها $a=۱$ ممکن است.

۵- مجموعه‌ی $۱,۲,\cdots,۹$ را s می‌نامیم. مسئله‌ی را برای شماره‌های با هر تعداد رقم مطرح می‌کنیم و سعی می‌کنیم حداکثر تعداد شماره‌های ممکن با n رقم را پیدا کنیم که هر دو شماره‌ی انتخاب شده یا حداقل در دو رقم اختلاف داشته باشند و یا دریک رقم حداقل دو واحد اختلاف داشته باشند. می‌توان یک شماره‌ی n رقمی با ارقام موجود در مجموعه‌ی s را به‌صورت یک n تایی مرتب از اعضای مجموعه‌ی s دید که آن را با s^n نمایش می‌دهیم. به استقرار روی n نشان می‌دهیم حداکثر تعداد اعضایی از s^n که می‌توانند انتخاب شوند تا شرط مسئله‌ی را برآورده کنند برابر $\frac{۹n+۱}{۲}$ است. حکم برای حالت n=1 به‌سادگی و با اندکی چک‌کردن ساده به دست می‌آید. (حتی می‌شد $n=۰$ را به‌عنوان پایه‌ی استقرار در نظر گرفت) حال فرض کنید که حکم برای $n-۱$ برقرار باشد و ما می‌خواهیم حداکثر

nتایی‌هایی مرتب با خاصیت مطلوب را بیابیم. اعضای s^n را با توجه به عضو اول آن‌ها می‌توان به ۹ دسته تقسیم کرد. اعضایی که عضو اول آن‌ها ۱ است را A_1، آن‌هایی که عضو اول آن‌ها ۲ است را A_2 و ... واضح است که برای هر $i \in s$ تعداد اعضای A_i برابر 9^{n-1} است (برای هر جایگاه یکی از عناصر s باید انتخاب شود و بنابراین ۹ حالت داریم) بنابراین تعداد عناصر s^n هم برابر 9^n خواهد بود. حال دقت کنید که هر عضو A_1 را می‌توان با تغییر عضو اولش از یک به دو به عنصری از A_2 تبدیل کرد و بالعکس. بنابراین هر عضو از A_1 را با یک عضو از A_2 جفت می‌شود. به‌گونه‌ای که تنها در رقم اول تفاوت داشته باشند. توجه کنید که ازآنجاکه دو شماره‌ی یک جفت در یک رقم و آن‌هم تنها یک واحد اختلاف دارند، نمی‌توانند هر دو جزء شماره‌های انتخابی باشند. بنابراین از هر جفت معرفی‌شده حداکثر یک عضو انتخاب می‌شود و درنتیجه تعداد اعضای انتخابی از $A_1 \cup A_2$ حداکثر برابر $\frac{[A_1]+[A_2]}{2} = 9^{n-1}$ است. به همین ترتیب تعداد اعضای انتخابی از $A_3 \cup A_4$، $A_5 \cup A_6$ و $A_7 \cup A_8$ هم حداکثر همین 9^{n-1}است. اما در مورد A_9 دقت کنید که رقم اول تمام اعضای A_9 یکسان است و بنابراین اگر اختلافی در دو عنصر انتخاب‌شده باشد، تفاوت در $n-1$ رقم بعدی است. دقت کنید که یک تناظر بین اعضای s^{n-1} و A_9 با اضافه کردن و یا برداشتن رقم ۹ از ابتدای شماره وجود دارد. بنابراین طبق فرض استقرا حداکثر $\frac{9^{n-1}+1}{2}$ تا از اعضای A_9 را می‌توان انتخاب کرد. بنابراین درنهایت تعداد کل شماره‌های انتخابی حداکثر برابر است با:

$$9^{n-1}+9^{n-1}+9^{n-1}+9^{n-1}+\frac{9^{n-1}}{2}=\frac{9\times 9^{n-1}+1}{2}=\frac{9^{n-1}}{2}$$

بنابراین اثبات استقرا به پایان می‌رسند. دقت کنید که اگر همه‌ی nتایی که زوجیت مجموع ارقامشان با n یکی است را انتخاب کنیم تعدادشان برابر همین مقدار حداکثر است. از طرفی اگر دو شماره‌ی متفاوت با این خاصیت را در نظر بگیریم، نمی‌توانند تنها در یک شماره و آن‌هم یک واحد اختلاف داشته باشند. زیرا در این صورت زوجیت مجموع ارقام آن‌ها متفاوت خواهد شد. بنابراین می‌توان به تعداد حداکثر معرفی‌شده عضو انتخاب کرد.

در ادامه نشان می‌دهیم که تنها یک‌راه (همین راه بالا) برای انتخاب $\frac{9^{n+1}}{2}$ شماره n رقمی با خاصیت خواسته‌شده وجود دارد. این حکم را به استقرا روی n ثابت می‌کنیم. باز هم صحت گزاره در حالت $n=1$ با یک بررسی ساده قابل چک کردن است. (در اینجا هم می‌توان $n=0$ را به‌عنوان پایه‌ی استقرا در نظر گرفت) فرض کنید حکم برای $n-1$ برقرار باشد. طبق بالا برای رسیدن به حداکثر باید از A_9، $\frac{9^{n-1}+1}{2}$ عضو انتخاب شود که طبق فرض استقرا تنها به یک صورت امکان دارد. (یادآوری می‌کنیم که اعضای A_9 همان اعضای S^{n-1} هستند که یک رقم ۹ به ابتدای آن‌ها اضافه‌شده است. دقت کنید که اعضایی که انتخاب می‌شوند دقیقاً اعضایی از A_9 هستند که مجموع ارقام آن‌ها اضافه‌شده است) دقت کنید که اعضایی که انتخاب می‌شوند دقیقاً اعضایی از A_1 هستند که مجموع ارقام آن‌ها زوجیت متفاوتی با $n-1$ و بنابراین زوجیت یکسانی با n دارد. (زیرا با اضافه‌شده رقم ۹ به ابتدای شماره زوجیت مجموع رقم‌ها تغییر می‌کند.) حال مشابه جفت کردنی که در مورد اعضای A_1 و A_2 در بالا اتفاق می‌توان A_8 و A_9 را هم با یکدیگر جفت کرد، به‌گونه‌ای که اعضای هر جفت تنها در رقم اول متفاوت باشند. اعضای هر جفت تنها در رقم اول متفاوت باشند. برای رسیدن به حداکثر بالا باید از هر جفت دقیقاً یک عضو انتخاب شود. اما در $\frac{9^{n-1}+1}{2}$ تا از جفت‌ها شماره‌ای که رقم اولش ۹ بود انتخاب‌شده است. بنابراین از مابقی زوج‌ها باید عنصری از A_8 انتخاب شود که باز هم دارای این خاصیت است که زوجیت مجموع ارقامش با n یکی است. در ادامه‌ی اعضای A_8 و A_7 را با هم جفت می‌کنیم و استدلال قبلی را

این بار برای این دو تکرار می‌کنیم. با ادامه‌ی این استدلال تا رسیدن به A_1 می‌بینیم که همه‌ی اعداد انتخاب شده باید به‌صورت مثالی که گفته شد باشند و بنابراین یک راه یکتا برای انتخاب این تعداد شماره وجود دارد.

۶- ابتدا باید این فرض را به‌صورت مسئله‌ی اضافه کرد که زاویه‌ی B قائمه نیست.
با استفاده از روابط مربوط به قوت نقطه‌ی T نسبت به دایره‌ی محیطی ABC می‌فهمیم $R^۲ - OT^۲ = TA.TB$ که R شعاع دایره است. (این نتیجه را می‌شد با استفاده از رابطه‌ی استوارت در مثلث OAB و قاطع OT هم به دست آورد.) با توجه به تشابه دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی ATH و BTH می‌توان نتیجه گرفت که $TA.TB = TH^۲$ و لذا:

$$OT^۲ = R^۲ - TH^۲ = R^۲ - AH^۲.\cos^۲\angle(B)$$

با استدلال‌های کاملاً مشابه می‌توان نتیجه گرفته $(OT')^۲ = R^۲ - AH^۲.\cos^۲\angle(C)$ دقت کنید که تاکنون از فرض $AC = ۲OT$ استفاده نکرده‌ایم. حال اگر این رابطه برقرار باشد، داریم:

$$OT = \frac{۱}{۲}AC = R.\sin\angle(B) \Rightarrow R^۲ = AH^۲$$

پس طول ارتفاع AH برابر طول شعاع دایره یعنی R است. (دقت کنید که در اینجا از قائمه نبودن $\angle B$ و درنتیجه صفر نبودن کسینوسش استفاده کردیم) حال اگر روابط مشابهی را برای پاره‌خط OT' بنویسم حکم نتیجه می‌شود:

$$(OT')^۲ = R^۲ - AH.\cos^۲\angle(C) = R^۲(۱ - \cos^۲\angle(C)) = R^۲.\sin^۲\angle(C)$$

$$\Rightarrow OT' = R.\sin\angle(C) = \frac{۱}{۲} \times ۲R.\sin\angle(C) = \frac{۱}{۲}AB$$